

# LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE LA ENSEÑANZA PRIMARIA. ESTUDIO DE DIFICULTADES Y PROPUESTA DIDÁCTICA\*

Marina Tomás Folch  
Dpt. de Pedagogía i Didàctica. U.A.B.

## RESUMEN

La presente investigación es un estudio de las dificultades que se encuentran el alumno de los cinco primeros cursos de la enseñanza primaria a la hora de resolver problemas.

El trabajo ha permitido dar una secuenciación de problemas en orden a su dificultad, una categorización de variables que tipifican un problema y una clasificación de errores en su resolución. Todo ello ha conducido a confeccionar una propuesta didáctica susceptible de tener en cuenta en la enseñanza/aprendizaje de la resolución de problemas aritméticos en la escuela.

## ABSTRACT

The presented investigation is a study about the difficulties that pupils have concerning the arithmetic problem-solving during the first five courses of primary education.

The labour has permitted to give a sequenzation of problems in relation to their difficulty, an ordination of variables that characterizes a problem and an ordination of errors in their resolution. All of this have led to add a didactic proposal in order to take into account when work the teaching/learning of problem solving in the school.

(\*) Este estudio se ha realizado con una ayuda del «Institut d'Estudis Catalans».

## **Los problemas aritméticos en la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica**

Esta investigación es un estudio en relación a la enseñanza/aprendizaje de los problemas aritméticos. Nos preocupa el bajo rendimiento de esta tarea en la escuela primaria. Hemos abordado la cuestión analizando las dificultades que encuentran los escolares en la resolución de éstos.

El objetivo último de la investigación es poder presentar una secuenciación de problemas y variables de clasificación en orden a las diversas categorías de corrección consideradas. Esta secuenciación constituye una propuesta de acción para los docentes.

### **Algunas cuestiones sobre la resolución de problemas, las Matemáticas y el curriculum**

El curriculum en la enseñanza obligatoria se caracteriza por tener un carácter globalizador, que agrupa diversas facetas de la cultura, del desarrollo personal y social, de las necesidades vitales de los individuos para desarrollarse en sociedad, destrezas y habilidades fundamentales.

Dentro de este planteamiento hay que considerar las Matemáticas, como parte de un curriculum que favorezca una formación integral. Así, las Matemáticas deben posibilitar la adquisición de hábitos intelectuales, técnicas de trabajo, conocimientos científicos, también deben contribuir a la capacitación para el ejercicio de actividades profesionales y deben preparar para la participación activa en la vida social y cultural.

Desde un punto de vista lógico cabría preguntarse por la conveniencia o no de incluir las Matemáticas dentro del curriculum obligatorio para hacer posible este tipo de información. En este espíritu crítico se ha hecho una revisión de literatura de referencia hallando una total aceptación en la conveniencia de su inclusión. Para ser breves diremos que los Planes de estudios de todos los países incluyen esta parcela del saber desde que se sistematiza la enseñanza y ésta tiene un carácter más o menos obligatorio. Véase a modo de ejemplo la Ley General de Educación de 1970, las Orientaciones y Programas de EGB de 1982, el Diseño Curricular de Enseñanza Primaria de la Reforma Educativa de 1990 para citar sólo algunas. A nivel europeo cabe destacar el Informe COCKCROFT (1985) como indicador del interés y de la preocupación que supone para los Organismos Internacionales.

A nuestro entender las Matemáticas contribuyen a conseguir los objetivos generales desde las siguientes perspectivas:

- desarrollo de la capacidad de pensamiento y de la reflexión lógica y

- adquisición de un conjunto de instrumentos para explorar la realidad, explicarla y predecirla a fin de actuar en ésta y sobre ésta.

### Los problemas aritméticos dentro de las Matemáticas

Una vez fijado el papel que ocupan las Matemáticas dentro del currículum obligatorio cabe pasar a situar el papel de los problemas aritméticos dentro de las Matemáticas.

Los problemas representan a nuestro entender, dentro del área de las Matemáticas:

- a. un currículum prioritario puesto que:
  - son un medio de aprendizaje y refuerzo de los contenidos
  - dan sentido aplicativo al área
  - permiten la interrelación entre los diversos bloques y las áreas restantes
- b. uno de los principales objetivos de las Matemáticas puesto que los conceptos, teorías,... se explican para poder llegar a resolver problemas y
- c. un ensayo y aprendizaje para saber resolver problemas reales en un futuro. Son un instrumento metodológico.

Siguiendo por el camino de delimitar su papel señalaremos tres funciones que desempeñan los problemas en las Matemáticas:

- *función de enseñanza*. Los problemas sirven de medio para la adquisición, ejercitación y consolidación de sistemas de conocimiento matemático y para la formación de las habilidades y hábitos correspondientes y éstos son los objetivos principales de la enseñanza de las Matemáticas en los primeros grados.
- *función educativa*. Se refiere a la influencia que los problemas ejercen sobre la formación de la personalidad del niño, es decir, sobre el desarrollo de su concepción científica del mundo y de una posición activa y crítica respecto los fenómenos y hechos naturales y sociales.
- *función de desarrollo*. Esta función tiene que ver con la influencia que ejerce sobre el desarrollo intelectual del alumno y especialmente sobre la formación del desarrollo.

### Nuestra concepción sobre problema aritmético

Definimos problema aritmético en la enseñanza primaria como una situación imaginaria, susceptible de ser real, planteada en forma de enuncia-

do verbal o escrito que se resuelve mediante alguna(s) de las operaciones elementales.

En esta misma línea consideramos dos aspectos básicos en un problema:

- *el esqueleto*, representa aquello que es esencial en un problema, las operaciones que se deben realizar, tipos de transformaciones necesarias, etc.
- *el envoltorio*, representación aquello que envuelve al problema y que puede ser más o menos superfluo: la historia concreta, el lenguaje utilizado, el gráfico o dibujo que acompaña, etc.

Así, con un mismo esqueleto puede existir diferentes envoltorios siendo, posiblemente, la dificultad de dos problemas será distinta si tienen igual esqueleto y distinto envoltorio.

Por el contrario, el mismo envoltorio no puede tener dos esqueletos diferentes.

### **La resolución de problemas**

Consideramos conveniente distinguir claramente entre lo que es un problema de lo que es la resolución de éste. Cuando hablamos de problema hay que hacer a su vez otra distinción: problema resuelto o problema sin resolver. En el primer caso se utiliza como conjunto formado por el enunciado y de la resolución de éste mientras que en el segundo caso se referiría sólo al enunciado. Nuestra propuesta es que utilicemos los términos enunciado para referirnos a un problema sin resolver, resolución del problema a lo desarrollado por el alumno después de haber leído e interpretado el enunciado y problema a la suma del enunciado y la resolución.

Una vez concretados los términos de uso indicaremos algunas de las ideas que consideramos más relevantes sobre la resolución de problemas.

En este sentido citamos a ORTON (1990) cuando define: La resolución de problemas se entiende como generadora de un proceso a través del cual el que aprende combina elementos de conocimiento, reglas, técnicas, habilidades y conocimientos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva.

A nuestro entender los problemas nunca pueden ser rutinarios. Sería incompatible con su propia definición. Cada problema presenta con mayor o menor grado una novedad para el que aprende. Su solución depende del hecho que el alumno no sólo tenga un conocimiento y las habilidades requeridas sino que sea capaz de utilizarlas y establecer una red o estructura. El calificativo de rutinario es al menos temeraria. Depende del momento de maduración, evolución y de aprendizaje en que se encuentra el alumno.

No se puede clasificar un problema en estos términos de una manera absoluta aunque si aplicada a un individuo y contexto.

MAYER (1982) señala cuatro tipos de conocimientos necesarios en la resolución de problemas:

- factores lingüísticos: se refiere a la comprensión del texto
- esquemático: relación entre los problemas tipo
- conocimiento algorítmico: como se realizan los procedimientos de cálculo, por ejemplo la suma,...
- conocimiento estratégico: cómo se enfocan los problemas.

La resolución de problemas no sólo es el objetivo fundamental y prioritario del área sino que es un instrumento metodológico importantísimo. La reflexión que se lleva a término cuando se resuelve un problema ayuda a construir y a consolidar conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Para aprender a resolver problemas es necesario proporcionar a los alumnos instrumentos, técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas que les permitan enfrentarse a los enunciados sin miedo y con ciertas garantías de éxito.

El proceso de resolución de problemas es la actividad mental desplegada por parte del solucionador desde el momento en que se le presenta un problema, lo asume para resolverlo y finaliza su tarea.

Podemos señalar las siguientes fases de resolución de un problema:

- Lectura y comprensión del problema
- Concepción de un plan de resolución
  - traducción del enunciado al lenguaje matemático
  - elección de una estrategia
  - resolución del problema
  - concretar una solución
- Comprobación de los resultados.

### **Las estrategias de resolución de problemas**

Las estrategias son métodos generales de resolución de problemas. No son recetas, sino que son ayudas para comprender el problema y sugerir caminos para llegar a una solución. Una estrategia es un método que permite llegar a la solución de un problema partiendo del enunciado.

REYS (1987) afirma que se pueden enseñar las estrategias, que estas son útiles y que además enseñando estrategias se enseña a abordar los problemas.

Sin embargo no todos los estudiosos del tema coinciden con REYS y dudan si realmente se puede enseñar a resolver problemas (GAGNÉ). Nuestra opinión al respecto está en línea de considerar útil el uso de estrategias siempre y cuando éstas no lleguen a configurar un listado de instrucciones imprescindible para resolver cualquier problema. Distinguiríamos también entre bondad de unas estrategias que aprende/deduca el alumno guiado por su profesor de las estrategias que se enseñan deliberadamente. En definitiva el uso indiscriminado de estrategias puede llevar a hacer de la tarea de resolución de problemas una tarea meramente repetitiva. Sería peligroso reducir la solución de problemas en meros ejercicios absentes de creatividad, de imaginación con lo cual dejarían de ser una ocasión para desarrollar la capacidad de pensar.

### **Variables estudiadas y plantilla de clasificación**

Teniendo en cuenta los aspectos básicos que conforman un problema se ha desarrollado un estudio más pormenorizado de las características de las variables relevantes en él. Así se han considerado cuatro grupos de variables de interés investigativo. Las dos primeras hacen referencia al envoltorio y las dos segundas al esqueleto. Estas variables son:

- variables que hacen referencia al enunciado
- variables que hacen referencia a la existencia o no y a la naturaleza del formato de resolución
- variables respecto a los mecanismos mentales para poder resolver el problema
- variables que hacen referencia a las operaciones concretas que deben realizarse para resolver el problema, es decir las habilidades mecánicas

El orden en que se han citado dichas variables es el mismo orden que el de los obstáculos que el alumno va a encontrarse para llegar a buen fin en la resolución del problema.

Previo a la elaboración de esta categorización de problemas fue menester llevar a cabo estudios sobre tipologías de problemas, aspectos que influían de todo tipo, diversas clasificaciones de variables cognitivas, etc.

Fruto de este estudio se han desgranado estas variables. Cada grupo de variables contiene a su vez obras subvariables. A continuación detallamos cada grupo de variables:

## Clasificación de Problemas

FORMA DEL ENUNCIADO	Presentación y pregunta
	Pregunta y explicación juntas
	Pregunta indirecta
	Explicación y varias preguntas
	Preguntas internas no explícitas
FORMATO DE RESOLUCIÓN	Inicio de Resolución
	Formato general
	No formato general
ASPECTOS MENTALES	Comprensión de conceptos
	Comprensión de transformaciones
	Leer e interpretar el enunciado
	Resolver problemas de rutina
	Realizar comparaciones
	Analizar datos
	Resolver problemas no de rutina
HABILIDADES MECÁNICAS	Suma y resta con números naturales
	Producto y división con números naturales
	Suma y resta con números naturales
	Producto y división con números naturales
	Suma y resta con fracciones
Producto y división con fracciones	

### 1. Según la forma del enunciado:

El enunciado del problema es el primer contacto que tiene el alumno con el problema. Este se puede analizar desde muchos ángulos. Nos podemos fijar en el vocabulario utilizado, en como se presentan los datos (en números o en palabras, más destacados o menos,...), en los tipos de letra, pero en esta investigación nos hemos fijado en la estructura del planteamiento de la situación y la/las preguntas que se formulan. Así distinguimos:

1.1. *presentación y pregunta*, cuando en el problema se narra una determinada situación y al final se formula la pregunta.

Por ejemplo:

Juan tiene dos bolígrafos y David le da tres. ¿Cuántos bolígrafos tiene ahora Juan?

1.2. pregunta y explicación a la vez, cuando el problema empieza por la pregunta que engloba a la explicación de la situación planteada.

Por ejemplo:

¿Cuántos colores tiene Joaquín si su madre le da 10 y su hermano 6?

1.3. pregunta indirecta, cuando el problema no se formula de forma directa.

Por ejemplo:

En el patio de la escuela hay doce neumáticos para jugar. La maestra quiere saber cuántos debe sacar para que todos los 18 niños tengan uno.

1.4. *explicación y diversas preguntas*, cuando el problema plantea una situación y pide varias respuestas.

Por ejemplo:

Felipe tiene dos pelotas para jugar a tenis y Marcelo tiene 8. ¿Cuántas pelotas tienen entre los dos? ¿Cuántas pelotas tiene más Marcelo?

1.5. *preguntas internas no explícitas*, cuando el problema formula además de las preguntas explícitas otras cuestiones que no nos dice directamente el enunciado.

Por ejemplo:

Juan ha recorrido en bicicleta 6.500 metros desde Sant Feliu a Molins sin parar. Su tío le ha prometido que le daría 10 duros por cada kilómetro. ¿Cuántas pesetas le ha dado su tío?

## 2. Según el forma de resolución

El segundo punto de contacto que tiene el niño con el problema es el formato de resolución. Este puede ser muy diverso pero nosotros hemos considerado esas tres subvariables:

2.1. *inicio de resolución*, cuando el problema va acompañado de unos gráficos, operaciones iniciales, etc. que de alguna forma le indican el camino de su resolución.

Por ejemplo:



¿Cuántas pesetas valen 5 lápices de 10 pesetas cada uno?

1 lápiz..... 10 ptas.

2 lápices .....  $10+10=20$  ptas.

3 lápices.....  $10+10+10=$  .....

2.2. *formato general*, cuando en el problema después del enunciado general aparece distribuido el espacio de resolución, compartimentado y con algunos sugerimientos.

Por ejemplo:

Oriol come 4 pastas y Laia come 6. ¿Cuántas pastas han comido entre los dos?

Dibujo

Operaciones

Respuesta: .....

2.3. *no formato general*, cuando el problema aparece sólo con el enunciado y nada más.

Por ejemplo:

Oriol come 4 pastas y Laia come 6. ¿Cuántas pastas han comido entre los dos?

### 3. Según los aspectos mentales

Una vez el alumno ha leído el enunciado y lo ha comprendido desde el punto de vista del lenguaje, es necesario que ponga en funcionamiento una estrategia para resolverlo. Para realizar esto hace falta que tengan lugar procesos como reconocer, comprender, aplicar, analizar datos, conceptos, hechos, transformaciones. En este sentido, la taxonomía de Bloom es una referencia obligada. Esta clasificación puede ser muy amplia pero los problemas aritméticos de este nivel no requieren algunos apartados, porque no tienen tanta complejidad quedando por tanto reducida a:

3.1. Los problemas de comprensión son aquellos en los que hay que relacionar el recuerdo de conceptos y generalizaciones. En estos problemas

se pone el énfasis en la demostración de la comprensión de conceptos y sus relaciones.

Por ejemplo:

Juan quiere tener el doble de juguetes que Alberto y Alberto tiene 8. Si su madre le da 6 juguetes, ¿cuántos le faltará para tener el doble que Alberto?

donde el alumno tendrá que recordar y demostrar que conoce el significado de «doble».

3.2. *comprensión de transformaciones*. En estos problemas se pone el énfasis en la capacidad para transformar los elementos de un problema de una modalidad a otra.

Por ejemplo:

En un almacén compramos 2 Hg, 8 Dg de arroz cada semana. ¿Cuántos gramos hemos comprado al cabo de 6 semanas?

donde deben realizar una transformación de Hg y Dg a gramos.

3.3. *leer e interpretar el enunciado*. Esta subvariable pertenece a la casi totalidad de problemas aritméticos de estos niveles. Supone algo más que la habilidad verbal normal y de lectural.

3.4. *resolver el problema de rutina*. Son todos aquellos problemas «tipo» donde el alumno debe recordar el conocimiento pertinente, seleccionar las operaciones adecuadas y resolver el algoritmo.

Por ejemplo:

Un librero nos ha regalado 8 cuentos para repartir por igual entre 4 niños. ¿Cuántos tocarán a cada niño?

3.5. *realizar comparaciones*. En este tipo de problemas se espera que el alumno recuerde la información pertinente, descubra una relación y formule una decisión.

Por ejemplo:

Pepa tiene 342 ptas. y su hermana Rocío 210. ¿Cuántas pesetas le tendrá que dar Pepa a Rocío para que las dos tengan igual?

3.6. *analizar datos*. Implica la lectura e interpretación de información, manipulación de esta información, tomar decisiones y obtener conclusiones como un resultado.

Por ejemplo:

¿Cuál es la suma de cuatro números si el primero es 427 y cada uno de los siguientes es igual al anterior más 13?

3.7. *resolver problemas no rutinarios*. En este tipo de problemas el alumno pone de manifiesto la transferencia de un aprendizaje anterior a un contexto nuevo.

Por ejemplo:

Pedro piensa un número. Si le sumas 8, lo divides por 16 y le sumas 13 da 17. ¿Qué número es?

Al repartir caramelos a un cierto número de niños tocan 3 a cada uno y sobran 15. Se añaden 3 caramelos para que les corresponda uno más. ¿Cuántos niños son? ¿Cuántos caramelos había?

4. Según las habilidades mecánicas. El último eslabón para resolver el problema consiste en efectuar adecuadamente las operaciones elegidas para resolver el problema y esto tiene que ver con la habilidad mecánica adquirida en cada una de las operaciones:

4.1. Suma y resta con números naturales, secuenciando en primer lugar la suma «sin llevar» con un dígito, luego dos dígitos, etc, la resta lo mismo y luego la suma y la resta «llevando».

4.2. Producto y división con números naturales, secuenciando de forma parecida al de la suma y resta.

4.3. Suma y resta con números decimales.

4.4. Producto y división con números decimales.

Estas variables de clasificación permiten que todo problema aritmético pueda ser definido con al menos una subvariable de cada una de las cuatro variables. No obstante puede que un problema se defina con 2 o 3 subvariables de un grupo determinado.

Por ejemplo el problema:

¿Cuántos kilómetros le quedan por recorrer al ciclista si la carrera es de 1.100 km y ha recorrido en la primera etapa 145,82 Km, en la segunda etapa 136,65 km y en la tercera etapa 162,62 km?

está clasificado con las siguientes subvariables:

- tiene enunciado tipo «explicación y pregunta a la vez»,
- no tiene formato de resolución,
- es un problema de rutina,
- hay que interpretar el enunciado,
- requiere una suma de números decimales,
- requiere una resta de números decimales.

### **Objetivos de la investigación**

Esta investigación pretende:

1. Averiguar las dificultades de la resolución de problemas aritméticos en la enseñanza primaria.
2. Descubrir la influencia en la resolución de las variables consideradas en un problema.
3. Obtener la frecuencia de cada categoría de corrección por cada problema y por cada curso.
4. Ordenar las baterías de problemas según las conclusiones que se deducen del análisis de resultados de los problemas.
5. Ofrecer una propuesta orientadora para la enseñanza/aprendizaje de la resolución de problemas.

### **Las colecciones de problemas**

Se han confeccionado 105 problemas, 21 para cada curso. Estos problemas conforman el instrumento clave de la investigación. Cada problema viene definido por, al menos, una subvariable de cada grupo de variables.

Los objetivos que se pretenden con estas colecciones de problemas son:

- averiguar las dificultades propias del nivel del curso y de los cursos superiores,
- clasificar y ordenar dichas dificultades,
- distinguir entre errores generalizados (muy frecuentes) y particulares (menos frecuentes),
- darse cuenta del cumplimiento del programa oficial,

- captar las diferencias en resolución de problemas entre los alumnos según la población, titularidad del centro, lengua de aprendizaje, etc.,
- conocer y comparar los contenidos más trabajados del curso.

Cada escolar ha resuelto 7 problemas correspondientes a uno de los tres grupos/opciones de cada curso que componían la totalidad de los 21 problemas. Se cuidó que cada opción ofreciera una dificultad similar lo cual se pone de relieve en la validación de las pruebas.

### La corrección de las pruebas

Cada problema se corrige según 7 aspectos o categorías de corrección.

La elaboración de unos criterios para corregir los problemas requería una cierta experiencia a la vez que la opinión de profesionales del tema. Así se han señalado los siguientes criterios de corrección de los problemas:

a. *errores en la comprensión del problema.* Los maestros comentan con cierta frecuencia: «los alumnos no comprenden lo que leen», «leen el problema rápido y no se enteran», «no saben bien lo que dice el problema» «no saben lo que se les pregunta en el problema». Todas estas expresiones que responden a un diagnóstico de la corrección de un problema las categorizamos diciendo que es un error de este tipo: de comprensión

b. *errores en la elección de las operaciones.* Por otro lado, en ocasiones aunque el alumno entiende la situación que plantea el problema y lo que se le pide desde el punto de vista de la comprensión resuelve erróneamente el problema utilizando operaciones distintas a las que correspondería. Se pone de manifiesto claramente cuando la expresión de la respuesta corresponde al planteamiento del problema. Se ha equivocado en la elección de las operaciones a realizar.

c. *errores en dar la respuesta.* Consideramos que es importante el que se escriba y comunique bien la respuesta puesto que forma parte del problema la correcta interpretación del resultado numérico.

d. *errores en los cálculos.* Otro tema que se hace patente en la corrección de un problema es el cálculo. Ya se ha dicho que el problema representa una evaluación de un conjunto de habilidades, conceptos, estrategias de pensamiento que se han trabajado con anterioridad. Una de estas habilidades es el cálculo. En ocasiones lo que dificulta que la resolución de un problema llegue a buen término son los errores cometidos en la ejecución de las operaciones.

e. *errores por no hacer nada del problema.* Otro problema muy diferente es el del alumno que delante de un problema no se pone a trabajarlo. No

se trata de que se equivoqué o no sinó de que no está motivado o animado a intentar resolverlo. El análisis de esta situación es complejo. Puede ser debido a la incapacidad de enfrentarse al problema. Destacamos esta categoría porque el evaluador no puede delante de un problema en blanco decir que no ha comprendido el problema o que no sabe cuáles son las operaciones que debe realizar, etc. Sólo podemos afirmar que no ha resuelto nada.

f. *errores por realizar parcialmente el problema.* Otras consideraciones que hay que hacer cuando evaluamos un problema que está resuelto a medias, o simplemente ha empezado a ser planteado. Dentro de esta categoría hay que considerar dos situaciones como mínimo: la situación en que parte del problema está correcto y la situación en que lo que se ha iniciado está mal.

g. *resolver completamente bien el problema.* Finalmente, hay que considerar una categoría de corrección en la cual se ha comprendido el problema, se ha planteado correctamente, se han resuelto correctamente las operaciones y se ha dado una respuesta con una interpretación adecuada a la situación planteada.

El objetivo es ordenar los problemas confeccionados según cada uno de los criterios de corrección, es decir según los siete criterios.

## **Hipótesis**

Primera hipótesis:

*La secuencia que se presenta en función de determinadas variables que caracterizan un problema es válida en relación a la capacitación y los aprendizajes que realiza el alumno.*

Segunda hipótesis:

*La batería de problemas que se presenta es válida y fiable y el material que se propone para su corrección da lugar a poder realizar un diagnóstico rápido y fiable en la enseñanza.*

## **Muestra**

La muestra la constituyen 3.284 alumnos de 1º a 5º de EGB de Cataluña. Estos alumnos se distribuyen en escuelas públicas y concertadas, confesionales y no confesionales, pequeñas y grandes, de poblaciones rural, semi-urbana y urbana, con lengua de aprendizaje catalán y castellano, con ratio

de menos de 25 alumnos y más de 25 alumnos, con y sin departamento de Matemáticas. (Veáse cuadro adjunto).

### Cuadro de Distribución de los Alumnos por Variables

Variable		Número de alumnos
Tipo centro	Pública	2.054
	Concertada	1.230
Población	Rural	225
	Semiurbana	710
	Urbana	2.349
Contexto sociocultural	Bajo	1.023
	Medio	1.327
	Medio-Alto	934
Tamaño	Completa	3.185
	Incompleta	99
Confesionalidad	Laica	2.360
	Religiosa	924
Lengua	Catalán	1.606
	Castellano	1.678
Departamento	No tiene	2.110
	Si tiene	1.174
Ratio	Menor de 25	1.288
	Más de 25	1.996
Curso	Primero	600
	Segundo	656
	Tercero	677
	Cuarto	655
	Quinto	696
Opción	A	1.117
	B	1.103
	C	1.064

### Paquetes estadísticos utilizados

Para llevar a cabo el estudio de los datos de la investigación se ha utilizado fundamentalmente los siguientes paquetes estadísticos:

- SPSSX (medias, Xi-cuadrado, T-text, Correlaciones,...)
- LISREL (análisis causal): ver relación entre variables de clasificación de un problema y resultados obtenidos.

### Algunos de los resultados más representativos

La corrección de los problemas nos ha permitido obtener unos resultados que nos dan luz sobre el tipo de errores más frecuentes, el curso de mayor incidencia de cada error, etc. También nos aporta datos sobre la facilidad o dificultad de los problemas según cada variable de clasificación. A continuación referenciamos algunos datos que son indicativos de la totalidad.

Por ejemplo el siguiente problema ha obtenido el porcentaje (85 %) más alto en errores de comprensión y en errores al elegir las operaciones. Este problema se ha pasado en 1<sup>er</sup> curso:

*Jordi tiene 4 bolas y Marcelo tiene 5 más que Jordi. ¿Cuántas bolas tienen entre los dos?*

En cambio el problema menos difícil en este mismo curso con un porcentaje de acierto de 94 % es el siguiente:

*Oriol come 4 pastas y Laia come 6. ¿Cuántas pastas han comido entre los dos?*

El error más alto en «no dar correctamente la respuesta» se ha dado en 3<sup>er</sup> curso (18 %) con el problema:

*¿Cuánto dinero toca a cada uno de los cuatro hermanos si la abuela tiene 44 ptas. para repartir?*

El error de cálculo más alto corresponde a 5<sup>o</sup> curso (27 %) con el problema:

*El palmo de una niña mide 17 cm. La cuerda de saltar mide 16 palmos de la niña. ¿Cuántos metros son?*



mientras que el problema con el porcentaje de errores en cálculo más bajo (0%) se obtiene en el problema de 2°:

*¿Cuántas ruedas tienen tres bicicletas juntas?*

El error «no hacer nada del problema» es muy bajo en los primeros cursos especialmente en 1°. El problema siguiente ha obtenido un 0% de error de este tipo:

*Oriol come cuatro pastas y Laia come 6. ¿Cuántas pastas comen entre los dos?*

En cambio el curso donde se ha obtenido un porcentaje mayor de este tipo de error es en 4° (17%). Señalaremos un problema como ejemplo (37%) más destacado de este error:

*¿Cuántos litros de leche tiene una jarra si está llena hasta sus  $3/4$  partes y su capacidad máxima es de 8 litros?*

El error tipo «hacer parcialmente correcto el problema» ha obtenido su máximo valor en 5° curso (13%). Veamos el problema de mayor porcentaje que corresponde a 5° curso (50%):

*Mi hermana compra una caja de 20 rotuladores que cuestan 260 ptas. y 3 cuadernos de 75 Ptas. cada uno. Paga con un billete de 2.000 ptas. ¿Cuántas ptas. le devuelven? ¿Cuánto vale cada rotulador? Si la caja de rotuladores llevara 16 rotuladores, ¿cuántas ptas. le habrían devuelto?*

Por último señalaremos, el problema que ha resultado con un porcentaje más alto de éxito (98%) en 2° curso:

*¿Cuántas ruedas tienen entre las tres bicicletas juntas?*

y el más difícil (7%) en 5° curso:

*A la hora de repartir caramelos a una cierta cantidad de niños tocan a 3 a cada uno y sobran 15. Añadimos 3 caramelos para que toque uno más. ¿Cuántos niños hay? ¿Cuántos caramelos había?*

El cuadro que mostramos a continuación pone de relieve la distribución de los tipos de errores en los cinco primeros cursos.

### Ordenación Total de Categorías de Corrección

	General	1°	2°	3°	4°	5°
1	Prob7	Prob7	Prob7	Prob7	Prob7	Prob7
2	Prob2	Prob2	Prob2	Prob2	Prob2	Prob2
3	Prob1	Prob1	Prob1	Prob1	Prob1	Prob1
4	Prob4	Prob3	Prob3	Prob3	Prob5	Prob6
5	Prob5	Prob4	Prob5	Prob4	Prob4	Prob4
6	Prob3	Prob6	Prob4	Prob5	Prob6	Prob5
7	Prob6	Prob5	Prob6	Prob6	Prob3	Prob3

Prob1: errores en la comprensión del enunciado

Prob2: errores en la elección de las operaciones

Prob3: errores en dar la respuesta

Prob4: errores en los cálculos

Prob5: errores por no hacer nada del problema

Prob6: errores por hacer parcialmente el problema

Prob7: totalmente correcto el problema

### Conclusiones

El estudio que presentamos nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

*Respecto a las categorías de corrección:*

Por un lado cabe señalar que la corrección de los problemas nos indica que el porcentaje de acierto total es siempre superior al porcentaje de cualquier clase de error. Entrando en las diversas tipologías de errores se obtiene que los más frecuentes en los cinco niveles corresponden a los errores de comprensión del problema y en la elección de las operaciones que conlleva. Los errores cometidos en dar correctamente la respuesta representan la tercera causa de error en los tres primeros cursos mientras que en los dos últimos es la última fuente de error. Ocupan un lugar destacado los errores de

cálculo. El porcentaje de problemas que se han dejado en blanco es insignificante en los tres primeros cursos. La realización parcialmente correcta del problema es una categoría más común en los cursos altos considerados que en los bajos.

*Respecto a las variables de clasificación:*

- «los enunciados que expresan en primer lugar la situación y posteriormente formulan la pregunta», «los enunciados expresados desde un principio formulando la pregunta» y «los enunciados que plantean la pregunta de forma indirecta» ofrecen un nivel de dificultad similar. No se han obtenido datos relevantes para indicar que cualquier de estas variables ofrece mayor dificultad. En cambio «los enunciados donde se formulan varias preguntas» resultan más difíciles tanto si estas se expresan de forma directa como de forma indirecta.
- *el formato de resolución* constituye una variable de clasificación que discrimina dificultades en el problema. Así cuando el problema lleva unos gráficos, dibujos o inicio de operación resulta significativamente más fácil que cuando se presenta el enunciado a secas. También existe diferencia significativa si se presenta un formato de resolución estándar.
- *los aspectos mentales* implicados en la resolución del problema resultan significativos en algunos casos y otros no. Cabe señalar que los problemas que implican transformaciones, análisis de datos o realizar comparaciones resultan significativamente más difíciles. También se obtiene un incremento notorio de dificultad cuando el problema se considera no rutinario.
- el estudio de *las habilidades mecánicas* que eran necesarias para resolver el problema nos ha ofrecido datos que nos permiten decir lo siguiente:
  - las operaciones ofrecen un incremento de dificultad si se presentan antes de haberse obtenido la mecánica de cálculo pero dejan de ser una causa de dificultad en el curso siguiente.
  - las habilidades mecánicas ofrecen, en proporción, mayor dificultad en los cursos cuarto y quinto que en los tres primeros.
- el número de operaciones aritméticas que requiere un problema influye de forma significativa en la dificultad del mismo de manera que al aumentar el número de operaciones aumenta el fracaso.
- el número de palabras que contiene el enunciado de un problema influye significativamente en la dificultad de resolución. Este hecho se produce en todos los cursos aunque en los tres primeros cursos influye más que en 5º.

### *Respecto a la propuesta de la enseñanza/aprendizaje de los problemas aritméticos*

Desde nuestro punto de vista el estudio realizado será válido en la medida que sea útil en la práctica. Por ello nuestro interés radica en su parte aplicada. En este estudio se ha procurado obtener una muestra muy amplia, lo más significativa posible a fin de poder generalizar los resultados. Desde esta perspectiva cabe señalar los extremos hallados que pueden ser orientativos para la tarea docente. Tales extremos son los referentes a la indicación del grado de dificultad de cada problema y a la ordenación de categorías de error en general y por curso. También es orientadora de la forma de concebir un problema, de las variables a considerar en cada uno y por lo tanto de la propuesta curricular en resolución de problemas.

En resumen cabe señalar en la propuesta que ofrecemos lo siguiente:

1º unas pruebas de problemas validadas y fiables que permiten diagnosticar a un alumno en resolución de problemas y

2º una ordenación de variables según dificultad observada a fin de que se propongan problemas siguiendo el orden propuesto.

### BIBLIOGRAFÍA

- ALONSO, V.; GONZÁLEZ CARMONA, A.; SAENZ BARRIO, O. Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el Ciclo Medio de la E.G.B. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 6 nº 3. Noviembre. Barcelona, 1988.
- ARRIETA GALLASTEGUI, J.J. La resolución de problemas y la educación matemática: Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 7 nº 1. Febrero. Barcelona, 1989.
- BAUTISTA GARCÍA-VERA, A. Fundamentos de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas. *Revista de Educación* núm. 282. Madrid. 151-160. 1987.
- BOVENMYER, A. Training Students to represent arithmetic word problems *Journal of Educational Psychology*. Vol. 81 nº 4 pàg 521-531. 1989.
- CARPENTER, T.P.; HIERBERT, J.; MOSSER, J.M. The effect of instruction of children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, nº 1. 1983.
- COCKCROFT. Informe. Las matemáticas sí cuentan. MEC. 1985.
- CONTRERAS, L.C. La resolución de problemas, ¿una panacea metodológica?. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 5 nº 1. Febrero. Barcelona, 1987.

- ELBOUDALI, A. L'influence de la familiarité du contexte sur la résolution de problèmes verbaux en Mathématiques, au niveau du secondaire au Maroc. Tesis Inédita. Universitat Laval. 1984.
- FAYOL, M.; ABDI, H. Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 a 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*. Vol. 1 n° 1 pàg. 41-58. 1986.
- GAGNÉ, R.M. Las condiciones del aprendizaje Ed. Aguilar. Madrid, 1971.
- GARRET, R.M. Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 6 núm. 3. Noviembre 1988.
- GIL, D. i altres. La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la escuela*. N. 6 pàg. 3-21. 1988.
- GIPSON, M. Relationships between formal-operational thought and conceptual difficulties in genetics problem solving. *Journal of Research in Science Teaching*. Vol. 26 n° 9, pàg. 811-821. 1989.
- GOLDMAN, S.; MERTZ, D.; PELLEGRINO, J. Individual Differences in Extended Practice Functions and Solution Strategies for Basic Addition Facts. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 4 pàg. 481-496. 1989.
- GÓMEZ CHACÓN, I.M. Los protocolos de resolución en la enseñanza de matemáticas. *Revista Suma de Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. Granada, 1989.
- GRUP ARESTA. El aprendizaje de resolución de problemas de planteo algebraico. *Enseñanza de las ciencias*. pp. 18-27. 1985.
- ISUS, S. La resolución de problemas aritméticos. Apuntes de Educación. *Nuevas Tecnologías*. N°31 Oct. Dic. 1988.
- ISUS, S. Orientaciones curriculares en la resolución de problemas aritméticos verbales. Temas actuales sobre Psicopedagogía y Didáctica. Ed. Narcea. II Congreso Nacional Vasco. 1988.
- KILPATRICK, J. Research on problem solving in mathematics. *School, Science and Mathematics*. 78, 189-192. 1978.
- KLAUER, K.J. Teaching for analogical Transfer as a means of problem-solving, thinking and learning. *Instructional Science. An International Journal*. Vol. 18 n° 3. pàg. 179-193. 1989.
- LABARRE. Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Ed. Pueblo y Educación. La Habana, 1987.
- LANGSFORD, P.E. Arithmetical word problems: thining in the versus thinking on the table *Educational Studies in Mathematics*. N. 17. 1986.
- MEIRING, S.P. Problem Solving. A Basic Mathematics Goal, 2: A resource for problem Solving. RIE Setembre. 1980.

- MIRANDA, A.; FORCES, M.C. Aplicación de las técnicas cognitivo-comportamentales en la resolución de problemas de Matemáticas. *Revista de Psicología de la Educación*. Vol. 1 n° 2. 1989.
- NORWICH, B. Self-Efficacy and Mathematics Achievement. A study of their Relation. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 79 n° 4. 1987.
- OÑOBRE DE TORRE, A.M. Sólo ante el problema. *Cuadernos de Pedagogía*. Nov. 1989.
- ORTON, A. Didáctica de las Matemáticas. Ed. Morata, S.A. i M.E.C. Madrid, 1990.
- POLYA, G. *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México, 1985.
- PUIG, L.; CERDÁN, F. *Problemas aritméticos escolares*. Ed. Síntesis. Madrid, 1988.
- QUINN, B; JADAV, A. Causal Relationship between Attitude and achievement for elementary grade Mathematics and reading. *The Journal of Educational Research*. Vol. 80 n° 6. pàg. 366-373. 1987.
- SCHOENFELD, A.H. Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. La enseñanza de la matemática a debate. MEC. Servicio de publicaciones. 1985.
- SCHOENFELD, A.H. Measures of problem-solving, performance and problem-solving instruction. *Journal for Research in Mathematics*. Vol. 13 n° 1. pp 31-49.
- SWELLER, J. Cognitive Technology: Some Procedures for facilitating Learning and Problem Solving in Mathematics and Science. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 81 n° 4. Pg. 459-466. 1989.
- THREADGILL-SOWDER, J.; MOYER, J.; MOYER, M. Cognitive Variables and Performance on Mathematical Story Problems. *Journal Experimental Education*. Pàg. 56-61.
- WILLIS, G.; FUSON, K. Teaching children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Substraction Word Problems. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 80 n° 2 pàg. 192-201. 1988.